QCM

1. L'équation $z^2+z+1=0$ a deux solutions conjuguées(les coefficients réels)
2. L'équation $z^2-2z+2=0$ a pour solutions 1-i et 1+i (solutions conjuguées)
3. L'équation $z^3- z^2+z-1=0$ admet une seule solution réelle
4. L'équation $z^4=-1$ admet quatre solutions distinctes
5. Le nombre $\sqrt{2}+i\sqrt{2}$ est une racine carrée de 4i

VRAI –FAUX

1. FAUX $i\sqrt{3}$ est une solution de l'éq : $z^2=-3$
2. FAUX 0 est une solution de $z^4=z^2$ et 0 n'est pas solution de $z^2=1$
3. FAUX i est aussi une solution de $z^4+z^2=0$
4. FAUX L'équation $z^2-2z+2=0$ a pour solutions 1-i et 1+i(ne sont pas opposées)
5. FAUX $z^4=a^4$ ssi z=a ou z=-a ou z=ia ou z=-ia
6. FAUX $e^{i\frac{\pi}{6}}$ est une racine cubique de i qui n'est pas imaginaire

EX 1 PAGE 31 :

$$a=4\sqrt{2}(1+i)=4\sqrt{2}(\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}})=8e^{i\frac{\pi}{4}}$$

Les racines cubiques de a sont : $z_k=\sqrt[3]{8}e^{i(\frac{\frac{\pi}{4}+2k\pi}{3})}$ $avec$ $k\in\{0,1,2\}$

$$\Rightarrow z_0=2e^{i\frac{\pi}{12}} \quad ; \quad z_1=2e^{3i\frac{\pi}{4}} \quad ; \quad z_2=2e^{17i\frac{\pi}{12}}$$

EX 2 PAGE 31 :

$$a=8\sqrt{2}(-1-i)=8\sqrt{2}(\sqrt{2}e^{-3i\frac{\pi}{4}})=16e^{-3i\frac{\pi}{4}}$$

Les racines quatrièmes de a sont :

$$z_k=\sqrt[4]{16}.e^{i(\frac{-3\frac{\pi}{4}+2k\pi}{4})} \quad avec \quad k\in\{0,1,2,3\}$$

$$\Rightarrow z_0=2e^{-3i\frac{\pi}{16}} \; ; \; z_1=2e^{5i\frac{\pi}{16}} \; ; \; z_2=2e^{13i\frac{\pi}{16}} : \; z_3=2e^{21i\frac{\pi}{16}}$$

EX 3 PAGE 31 : $a = 32i = 32e^{i\frac{\pi}{2}}$

Les racines cinquièmes de a sont :

$$z_k = \sqrt[5]{32}e^{i(\frac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{5})} = 2e^{i(\frac{\pi}{10}+\frac{2k\pi}{5})} \quad avec\ k \in \{0,1,2,3,4\}$$

EX 4 PAGE 31 :

$$a = 32(-\sqrt{3}+i) = 32(2e^{5i\frac{\pi}{6}}) = 64e^{5i\frac{\pi}{6}}$$

Les racines sixièmes de 32(i-√3) sont : $z_k = 2e^{i(\frac{5\pi}{36}+\frac{2k\pi}{6})}$ $avec\ k \in \{0,1,2,3,4,5\}$

EX 5 PAGE 31 :

*$z^2 = 2i = (1+i)^2 \Leftrightarrow$ z=1+i ou z=-1-i $S_{\mathbb{C}} = \{1+i;-1-i\}$

* $z^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow z^2 = (2i)^2 \Leftrightarrow$ z=2i ou z=-2i $S_{\mathbb{C}} = \{2i;-2i\}$

* $z^2 = -5+12i$ en posant z =x+iy l'équation est équivaut au système suivant :

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = -5 & (1) \\ x^2 + y^2 = 13 & (2) \\ 2xy = 12 & (3) \end{cases}$$

$(1)+(2) \Rightarrow 2x^2 = 8 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$

$pour\ x = 2\ ;(3)\ donne\ y = 3 \rightarrow z = 2+3i$

$pour\ x = -2\ ;(3)\ donne\ y = -3 \rightarrow z = -2-3i$

$S_{\mathbb{C}} = \{2+3i;-2-3i\}$

*$z^2 = e^{i\frac{\pi}{3}} \Leftrightarrow z = \pm e^{i\frac{\frac{\pi}{3}}{2}} = \pm e^{i\frac{\pi}{6}}$ $S_{\mathbb{C}} = \left\{e^{i\frac{\pi}{6}}; -e^{i\frac{\pi}{6}}\right\}$

* $z^2 + i = 0 \Leftrightarrow z^2 = -i = \frac{-2i}{2} = \left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^2 \Leftrightarrow$ $z = \mp\frac{1-i}{\sqrt{2}}$

*$(1-iz)^2=-1=i^2 \Leftrightarrow 1-iz=i$ ou $1-iz=-i \Leftrightarrow z=\frac{1-i}{i}=-1-i$ ou $z=\frac{1+i}{i}=1-i$

$$S_{\mathbb{C}}=\{1-i;-1-i\}$$

*$(2z-1)^2-(i-z)^2=0 \Leftrightarrow (2z-1-i+z)(2z-1+i-z)=0 \Leftrightarrow (3z-1-i)(z-1+i)=0 \Leftrightarrow z=1-I$ ou $z=\frac{1}{3}+i\frac{1}{3}$

$$S_{\mathbb{C}}=\left\{1-i;\frac{1}{3}+\frac{1}{3}i\right\}$$

EX 6 PAGE 31 :

1. $Z^2+z+2=0$ $\Delta=1^2-4.2=-7 \Rightarrow \delta=i\sqrt{7} \Rightarrow$

   $z=\frac{-1-i\sqrt{7}}{2}$ ou $z=\frac{-1+i\sqrt{7}}{2}$ $\quad S_{\mathbb{C}}=\left\{-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{7}}{2};-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{7}}{2}\right\}$

2. $Z^2-2iz-1=0$ $\Leftrightarrow (z-i)^2=0 \Leftrightarrow z=I$ $\quad S_{\mathbb{C}}=\{i\}$
3. $Z^2-(4+2i)z+2+4i=0$ $\Delta'=(2+i)^2-(2+4i)=1 \Rightarrow z=1+I$ ou $z=3+I$ $S_C=\{1+I;3+i\}$
4. $(2+i)z^2+(1-7i)z-5=0$ $\Delta=(1-7i)^2+20(2+i)=-8+6i \Rightarrow \delta=1+3i \Rightarrow$

   $Z=\frac{-1+7i+1+3i}{2(2+i)}=\frac{10i}{4+2i}=1+2i$ ou $z=\frac{-1+7i-1-3i}{2(2+i)}=\frac{-2+4i}{4+2i}=i \Rightarrow S_C=\{1+2i;i\}$

EX 7 PAGE 31 :

1. $(\alpha-i)^2=\alpha^2-2i\alpha-1$
2. (E) $z^2-\alpha(\alpha+i)z+i\alpha^3=0$ $\Delta=\alpha^2(\alpha+i)^2-4i\alpha^3=\alpha^2(\alpha^2+2i\alpha-1)-4i\alpha^3=\alpha^2(\alpha^2-2i\alpha-1)=\alpha^2(\alpha-i)^2 \Rightarrow \delta=\alpha(\alpha-i)$

   $\Rightarrow z=\frac{\alpha(\alpha+i)+\alpha(\alpha-i)}{2}=\alpha^2$ ou $z=\frac{\alpha(\alpha+i)-\alpha(\alpha-i)}{2}=i\alpha$ $\Rightarrow S_C=\{\alpha^2;i\alpha\}$

3. $|\alpha^2|=|\alpha|^2=r^2 \quad Arg(\alpha^2)\equiv 2.Arg(\alpha)\equiv 2.\theta[2\pi]$

   $|i\alpha|=|i||\alpha|=1.r=r \quad Arg(i\alpha)\equiv Arg(i)+Arg(\alpha)\equiv \frac{\pi}{2}+\theta[2\pi]$

EX 8 PAGE 31 :

1. a. E : $z^2-(3+i)z+2(1+i)=0$ $\Delta=(3+i)^2-8(1+i)=-2i=(1-i)^2 \Rightarrow \delta=1-I$

   $\Rightarrow z=\frac{3+i+1-i}{2}=2$ ou $z=\frac{3+i-1+i}{2}=1+i \Rightarrow S_C=\{2;1+i\}$

   b. $2=2.(\cos(0)+i\sin(0))$ $\quad 1+i=\sqrt{2}.\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$
2. E' : $X^4-(3+i)X^2+2(1+i)=0$ en posant $X^2=z$ on obtient l'équation E

   $\Rightarrow X^2=2$ ou $X^2=1+i \Rightarrow X=\pm\sqrt{2}$ ou $X=\pm\sqrt[4]{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)+i.\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)\right)$

EX 9 PAGE 31 :

1. $\sqrt{2}$.(1+i) est une solution de (E) $\Rightarrow[\sqrt{2}.(1+i)]^4$ +a. $[\sqrt{2}.(1+i)]^2$+b+12i=0

   $\Rightarrow$4.(-4)+a.2.2i+b+12i=0$\Rightarrow$i.(4a+12)+b-16=0$\Rightarrow$a=-3 et b=16

2. (E) : z^4 -3z^2+16+12i=0 est une équation bicarrée et $\sqrt{2}$.(1+i) une solution $\Rightarrow-\sqrt{2}$.(1+i)solution

   $\Rightarrow z^4$ -3z^2+16+12i=(z-$\sqrt{2}$.(1+i))(z+$\sqrt{2}$.(1+i))(z^2+n)=(z^2-4i)(z^2+n)$\Rightarrow$n=-3+4i

   (E)$\Leftrightarrow z^2$-4i=0 ou z^2=3-4i$\Leftrightarrow$z=$\pm\sqrt{2}$.(1+i) ou z =$\pm$(1+2i)

   Conclusion : S_C={1+2i ;-1-2i ; $\sqrt{2}$.(1+i);- $\sqrt{2}$.(1+i) }

EX 10 PAGE 31 :

1. (E):z^2+(1+i)z+i=0 a-b+c=0$\Rightarrow$z=-1 ou z=-i $\Rightarrow S_C$={-1 ;-i}
2. a. iz^2+(1-i)z-1=0$\Leftrightarrow$i.(z^2+(-1-i)z+i)=0$\Leftrightarrow$(z^2+(-1-i)z+i)=0 a+b+c=0$\Rightarrow$z=1 ou z=i $\Rightarrow S_C$={1 ;i}

   b. z^4+(1+i)z^2+i=0 en posant Z=z^2 on obtient l'équation (E)$\Rightarrow z^2$=-1 ou z^2=-i

   $\Rightarrow$z=$\pm$i ou z=$\pm\frac{(1-i)}{\sqrt{2}}$

EX 11PAGE31 :

1. $z^4+6z^2+25=0$ on pose : t = z^2

l'équation devient : $t^2+6t+25=0$

$\Delta'=-16\rightarrow\delta'=4i \qquad t'=-3+4i \quad et \quad t''=-3-4i$

$$\bullet\ t=-3+4i\Leftrightarrow z^2=-3+4i\Leftrightarrow\begin{cases}(1)\,x^2-y^2=-3\\(2)\,x^2+y^2=5\\(3)\,2xy=4\end{cases}$$ (en posant z=x+iy)

(1)+(2)$\Rightarrow 2x^2=2\Rightarrow x^2=1\Rightarrow x=\pm 1$

Pour x=1 l'éq (3) donne y=2$\Rightarrow$z=1+2i et Pour x=-1 l'éq (3) donne y=-2$\Rightarrow$z=-1-2i

$$\bullet\ t=-3-4i\Leftrightarrow z^2=-3-4i\Leftrightarrow z^2=(1-2i)^2\Leftrightarrow z=1-2i\ ou\ z=-1+2i$$

$$S_{\mathbb{C}}=\{1+2i;-1-2i;1-2i;-1+2i\}$$

2. $z^4+4z^2-77=0$

On pose : t = z² On aura : $t^2+4t-77=0$ $\Delta'=81\rightarrow\delta'=9$ $t'=-11\,et\,t''=7$

- $t=7\Leftrightarrow z^2=7\Leftrightarrow z=-\sqrt{7}\ ou\ z=\sqrt{7}$
- $t=-11\Leftrightarrow z^2=-11\Leftrightarrow z=i\sqrt{11}\ ou\ z=-i\sqrt{11}$

$$S_{\mathbb{C}}=\left\{-\sqrt{7};\sqrt{7};-i\sqrt{11};i\sqrt{11}\right\}$$

3. $(E):z^5=\bar{z}$

- 0 est une solution de (E).
- Déterminons les solutions non nulles de (E).

On pose $z=re^{i\theta}$; $r>0$

$$(E)\Leftrightarrow(re^{i\theta})^5=\overline{re^{i\theta}}\Leftrightarrow r^5e^{5i\theta}=re^{-i\theta}\Leftrightarrow r^4e^{6i\theta}=1e^{i.0}\Leftrightarrow\begin{cases}r^4=1\\6\theta=2k\pi,k\in\mathbb{Z}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}r=1\\\theta=\dfrac{k\pi}{3},k\in\mathbb{Z}\end{cases}$$

Les solutions sont :

$$z_0=1\ ;\ z_1=1.e^{i\frac{\pi}{3}}=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\ ;\ z_2=1.e^{i2\frac{\pi}{3}}=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\ ;\ z_3=1.e^{i\pi}=-1$$

$$z_4=1.e^{4i\frac{\pi}{3}}=-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\ ;\ z_5=1.e^{5i\frac{\pi}{3}}=\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$S_{\mathbb{C}}=\left\{0,-1,1,-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right\}.$$

EX 12PAGE31:

$$posons\ P(z)=z^3-8z^2+24z-32;\qquad (E)\Leftrightarrow P(z)=0$$

1) $p(4)=4^3-8\times4^2+24\times4-32=0$ d'où $z_0=4$ est une solution de (E).

2) • Factorisons P(z).

$$p(z)=(z-4)(z^2+bz+c)$$
$$p(z)=z^3+(b-4)z^2+(c-4b)z-4c$$

Identifions On aura : $\begin{cases}b-4=-8\\c-4b=24\\-4c=-32\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b=-4\\c=8\end{cases}$

D'où $P(z)=(z-4)(z^2-4z+8)$

• $P(z)=0\Leftrightarrow z-4=0\ ou\ z^2-4z+8=0\ \ (\Delta'=-4\rightarrow\delta'=2i)$

$\Leftrightarrow z=4\ \ ou\ \ z=2+2i\ \ ou\ \ z=2-2i$

$$S_{\mathbb{C}}=\{4;2+2i;2-2i\}$$

3. $z_0=4=4e^{i0}$; $z_1=2(1+i)=2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$ et $z_2=\overline{z_1}=2\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$

EX 13PAGE 31 :

$$soit\ P(z)=z^3-(3+4i)z^2-4(1-3i)z+12\ ;\qquad (E)\Leftrightarrow P(z)=0$$

1. On pose $z=\alpha,\ \alpha\in IR$

$$P(\alpha)=0\Leftrightarrow\alpha^3-(3+4i)\alpha^2-4(1-3i)\alpha+12=0$$

$$\Leftrightarrow(\alpha^3-3\alpha^2-4\alpha+12)+i(-4\alpha^2+12\alpha)=0\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha^3-3\alpha^2-4\alpha+12=0 & (1)\\-4\alpha^2+12\alpha=0 & (2)\end{cases}$$

$$(2)\Leftrightarrow\alpha(-4\alpha+12)=0\Leftrightarrow\alpha=0\,ou\,\alpha=3$$

Vérifions dans (1) pour $\alpha = 3$.

$(3)^3 - 3(3)^2 - 4.3 + 12 = 27 - 27 - 12 + 12 = 0$ D'où 3 est une solution réelle de(E).

2) 3 est une solution de E⇒

$$P(z) = (z-3)\left[z^2 + b.z + c\right]$$

$$P(z) = z^3 + (b-3)z^2 + (c-3b)z - 3c$$

Identifions

On aura : $\begin{cases} b-3 = -(3+4i) \\ c-3b = -4(1-3i) \\ -3c = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -4i \\ c = -4 \end{cases}$ D'où : $P(z) = (z-3)\left[z^2 - 4iz - 4\right]$

$$(E) \Leftrightarrow (z-3)(z^2 - 4iz - 4) = 0 \Leftrightarrow z = 3 \; ou \; z^4 - 4iz - 4 = 0 \Leftrightarrow z = 3 \; ou \; (z-2i)^2 = 0 \Leftrightarrow z = 3 \; ou \; z = 2i$$

$$S_{\mathbb{C}} = \{3; 2i\}.$$

EX 14 PAGE32:

$$(E) : z^3 = 2 + 11i$$

1)

$$(2+i)^3 = 2^3 + 3.2^2 i + 3.2(i)^2 + i^3 = 8 + 12i - 6 - i = 2 + 11i$$

D'où $z_0 = 2 + i$ est solution de (E)

2) $(E) \Leftrightarrow z^3 - (2+11i) = 0$ Soit $f(z) = z^3 - (2+11i)$

On a : $f(2+i) = 0$ D'où $f(z) = \left[z - (2+i)\right].\left[z^2 + bz + c\right]$

$$f(z) = z^3 + (b-2-i)z^2 + \left[c - b(2+i)\right]z - c(2+i)$$

Identifions ON AURA $\begin{cases} b-2-i = 0 \\ c-b(2+i) = 0 \\ -c(2+i) = -(2+11i) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 2+i \\ c = 3+4i \end{cases}$

On aura :

D'où : $f(z)=\left[z-(2+i)\right].\left[z^2+(2+i)z+3+4i\right]$

$(E)\Leftrightarrow z=2+i \text{ ou } z^2+(2+i)z+3+4i=0$

$$\Delta=-3(3+4i)\Rightarrow\delta=i\sqrt{3}(2+i)\quad z'=\frac{\left(\sqrt{3}-2\right)-i\left(1+2\sqrt{3}\right)}{2}\ et\ z''=\frac{-\left(2+\sqrt{3}\right)+i\left(2\sqrt{3}-1\right)}{2}$$

$$S_{\mathbb{C}}=\left\{2+i;\frac{\left(\sqrt{3}-2\right)-i\left(1+2\sqrt{3}\right)}{2};\frac{-\left(2+\sqrt{3}\right)+i\left(2\sqrt{3}-1\right)}{2}\right\}$$

EX 15 PAGE32:

1. $\alpha=\frac{1}{2}+i\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i.\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)=e^{-i\frac{\pi}{3}}$

   $\beta=\frac{3+i\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}.(\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2})=\sqrt{3}.\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)+i.\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)=\sqrt{3}.e^{i\frac{\pi}{6}}$

2. a. $z^2-2z+1-e^{2i\theta}=0$ $\quad\Delta'=1-1+e^{2i\theta}=e^{2i\theta}\Rightarrow\delta=e^{i\theta}\Rightarrow z=1+e^{i\theta}$ ou $z=1-e^{i\theta}$

   $z_1=1-e^{i\theta}$ $\quad z_2=1+e^{i\theta}$

$$z_1=1-e^{i\theta}=e^{i0}-e^{i\theta}=e^{i\frac{\theta}{2}}.\underbrace{\left(e^{-i\frac{\theta}{2}}-e^{i\frac{\theta}{2}}\right)}_{-2i\sin(\frac{\theta}{2})}=2\sin(\frac{\theta}{2})e^{-i\frac{\pi}{2}}.e^{i\frac{\theta}{2}}=2\sin(\frac{\theta}{2}).e^{i(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{2})}$$

   b.

$$z_2=1+e^{i\theta}=e^{i0}+e^{i\theta}=e^{i\frac{\theta}{2}}\underbrace{\left(e^{-i\frac{\theta}{2}}+e^{i\frac{\theta}{2}}\right)}_{2\cos(\frac{\theta}{2})}=2\cos(\frac{\theta}{2})e^{i\frac{\theta}{2}}$$

   c. $z_1=\alpha\Leftrightarrow\begin{cases}2\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)=1\\ \frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{2}\equiv-\frac{\pi}{3}[2\pi]\end{cases}\Leftrightarrow\frac{\theta}{2}=\frac{\pi}{6}\left(car\ \frac{\theta}{2}\in\right]0,\frac{\pi}{2}[\ )\Leftrightarrow\quad\theta=\frac{\pi}{3}$

   pour $\theta=\frac{\pi}{3}$ $\quad$ on a aussi $z_2=\boldsymbol{\beta}$

EX 16 PAGE32:

1) (E) : $z^2+(1-2i)z-2i=0$ $\quad$ a-b+c=0$\Rightarrow$ $\quad z=-1$ $\quad$ ou $z=2i$ $\quad S_C=\{-1;2i\}$

2) E_θ : $z^2+(1-2e^{i\theta})z-2e^{i\theta}=0$ $\quad$ a-b+c=0$\Rightarrow$ $\quad z_1=-1$ $\quad$ et $\quad z_2=2e^{i\theta}$ $\quad S_C=\{-1\ ;2e^{i\theta}\}$

1. $Z_I = \frac{-1+2e^{i\theta}}{2} = -0,5+e^{i\theta} \quad \Rightarrow Z_I+0,5 = e^{i\theta}$
2. $Z_I=-0,5+e^{i\theta}$ l'ensemble des points I l'orsque θ varie dans $[0 ;2\pi[$ est le cercle de rayon 1 Et de centre le point B d'affixe -0,5
3. Le point A d'affixe -1 ;donc les points O et A sont sur l'axe des abscisses
   Pour que le point I soit aussi sur l'axe des abscisses il faut que $Im(Z_I=-0,5+e^{i\theta}) =0$
   $\Rightarrow \sin(\theta)=0 \Rightarrow \theta=0$ ou $\theta=\pi$ (car $\theta\in[0 ;2\pi[$)

EX 17 PAGE32:

1. $z^2-2z+1+a^2=0 \Leftrightarrow (z-1)^2-(ia)^2=0 \Leftrightarrow z-1=ia$ ou $z-1=-ia \Leftrightarrow z=1+ia$ ou $z=1-ia$ $S_C=\{1+ia ;1-ia\}$
2. a/ O,A et B alignées ssi $\frac{Z_A}{z_B}$ réel ssi $\frac{1+ia}{1-ia}$ réel ssi $\frac{1-a_2+ia_1}{1+a_2-ia_1}$ réel
   ssi $(1-a_2+ia_1).(1+a_2+ia_1)$ réel ssi $(1-a_2)a_1+a_1(1+a_2)=0$
   ssi $2a_1=0$ ssi $a_1=0$
   b/ $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$ sont orthogonaux ssi $\frac{Z_A}{z_B}$ imaginaire ssi $\frac{1+ia}{1-ia}$ imaginaire
   ssi $\frac{1-a_2+ia_1}{1+a_2-ia_1}$ imaginaire ssi $(1-a_2+ia_1).(1+a_2+ia_1)$ imaginaire
   ssi $(1-a_2)(1+a_2)-a_1a_1=0$ ssi ${a_1}^2+{a_2}^2=1$ ssi $|a|=1$
3. a/ $$1+e^{ix}=e^{i0}+e^{ix}=e^{i\frac{x}{2}}\underbrace{\left(e^{-i\frac{x}{2}}+e^{i\frac{x}{2}}\right)}_{2\cos(\frac{x}{2})}=2\cos(\frac{x}{2})e^{i\frac{x}{2}}$$
   $$1-e^{ix}=e^{i0}-e^{ix}=e^{i\frac{x}{2}}.\underbrace{\left(e^{-i\frac{x}{2}}-e^{i\frac{x}{2}}\right)}_{-2i\sin(\frac{x}{2})}=-2i\sin(\frac{x}{2}).e^{i\frac{x}{2}}$$
   b/
   $$1+ia=1+ie^{i\alpha}=1+e^{i\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)}=2\cos(\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{4})e^{i(\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{4})}$$
   $$1-ia=1-ie^{i\alpha}=1-e^{i\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)}=-2i\sin(\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{4})e^{i(\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{4})}$$
   c/ on a $a=e^{i\alpha} \Rightarrow |a|=1$ donc $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$ sont orthogonaux $\Rightarrow$OAB est rectangle en O
   pour que OAB soit isocèle en O il faut et il suffit que OA=OB
   $$\Leftrightarrow |1+ia|=|1-ia| \Leftrightarrow \left|\cos(\tfrac{\alpha}{2}+\tfrac{\pi}{4})\right| = \left|\sin(\tfrac{\alpha}{2}+\tfrac{\pi}{4})\right| \quad (-\tfrac{\pi}{2}<\alpha<\tfrac{\pi}{2} \rightarrow 0<\tfrac{\alpha}{2}+\tfrac{\pi}{4}<\tfrac{\pi}{2})$$
   $$\Leftrightarrow \frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4} \Leftrightarrow \alpha=0 \Leftrightarrow a=1$$
   Conclusion : pour que OAB soit un triangle rectangle et isocèle en O il faut que a=1

EX 18 PAGE32:

1.

$$z+\frac{4}{z}=4\cos(\theta)\Leftrightarrow z^2-4\cos(\theta)z+4=0$$

$$\Delta'=4\cos^2(\theta)-4=4(\cos^2(\theta)-1)=-4\sin^2(\theta)=\left(2i\sin(\theta)\right)^2\Rightarrow\delta'=2i\sin(\theta)$$

$$\Rightarrow z=2\cos(\theta)+2i\sin(\theta)\ ou\ z=2\cos(\theta)-2i\sin(\theta)$$

2. $2\cos(\theta)+2i\sin(\theta)=2e^{i\theta}$

$$2\cos(\theta)-2i\sin(\theta)=\overline{2\cos(\theta)+2i\sin(\theta)}=2e^{-i\theta}$$

3.

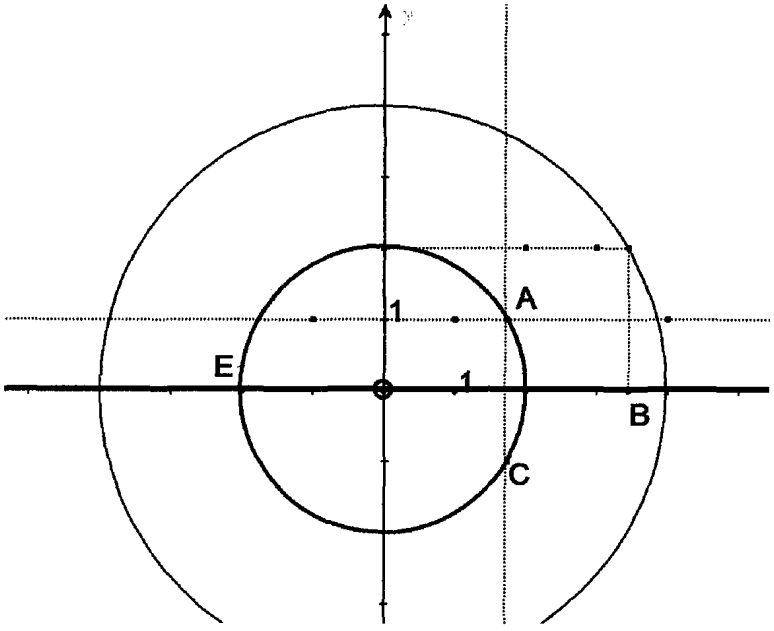
$$w\ réel\Leftrightarrow\overline{w}=w\Leftrightarrow\overline{z}+\frac{4}{\overline{z}}=z+\frac{4}{z}\Leftrightarrow z.\overline{z}^{-2}+4z=z^2\overline{z}+4\overline{z}\ et\ z\neq0$$

$$\Leftrightarrow z\overline{z}.\left(\overline{z}-z\right)+4(z-\overline{z})=0\Leftrightarrow(z-\overline{z})\left(4-z\overline{z}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow z=\overline{z}\quad ou\quad z\overline{z}=4\Leftrightarrow z\ réel\ \ ou|z|=2$$

$$M\in\left(O\vec{i}\right)\ privée\ de\ O\ \ ou\ M\in cercle\ de\ centre\ O\ et\ de\ rayon\ 2$$

$$E=\varsigma(O;2)\cup\left(O;\vec{i}\right)\setminus\{O\}$$



4. a/ voir figure

b/ A et C sont deux points du cercle de centre O et de rayon 2 donc appartiennent à E

B est un point de l'axe des abscisses donc appartient à E

c/ $\frac{z_A+z_C}{2}=\frac{2e^{i\theta}+2e^{-i\theta}}{2}=2\cos(\theta)=\frac{z_O+z_B}{2}$ *donc OABC est un parallèlogramme* (1)

$OA=OC=2 \qquad (2)$

$(1)\ et\ (2)\Rightarrow OABC\ est\ un\ losange$

d/

$OABC\ est\ un\ carrée\ ssi \left|\frac{z_C-z_A}{z_B-z_O}\right|=1$

$ssi \left|\frac{-4i\sin(\theta)}{4\cos(\theta)}\right|=1 \Leftrightarrow \cos(\theta)=\pm\sin(\theta)$

$ssi\ \theta=\frac{\pi}{4} \quad (\theta\in \left]0;\frac{\pi}{2}\right[)$

EX 19 PAGE33

1. a/ $\left(e^{i\theta}-i\right)^2=e^{2i\theta}-2ie^{i\theta}+i^2=-1+e^{2i\theta}-2ie^{i\theta}$

b/

$z^2-2iz+2ie^{i\theta}-e^{2i\theta}=0 \quad \Delta'=-1-2ie^{i\theta}+e^{2i\theta}=\left(e^{i\theta}-i\right)^2\Rightarrow\delta=e^{i\theta}-i$

$z'=i+e^{i\theta}-i=e^{i\theta} \quad et \quad z''=i-e^{i\theta}+i=2i-e^{i\theta}\ S_{\mathbb{C}}=\left\{e^{i\theta};2i-e^{i\theta}\right\}$

2. a/ ζ_1 est le cercle trigonométrique (de centre O et de rayon 1)

b/ $Z_I=\frac{Z_{M_1}+Z_{M_2}}{2}=\frac{e^{i\theta}+2i-e^{i\theta}}{2}=i$

c/ ζ_2 est le cercle de centre le point A d'affixe 2i et de rayon 1 .

3. a/

$(M_1M_2)^2=\left|2i-e^{i\theta}-e^{i\theta}\right|^2=4\left|i-e^{i\theta}\right|^2=4\left|2i\sin(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2})\right|^2=8\times2\sin^2(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2})$

$=8\times(1-\cos(\frac{\pi}{2}-\theta))=8.(1-\sin\theta)$

b/ $M_1M_2\ est\ \max imale\ pour \sin(\theta)=-1; or\ \theta\in[0;2\pi[\Rightarrow\theta=\frac{3\pi}{2}$

EX 20 PAGE33

I.

$$z^2+i\sqrt{3}z-i=0 \quad \Delta=-3+4i=(1+2i)^2 \Rightarrow \delta=1+2i$$

$$z=\frac{-i\sqrt{3}-1-2i}{2}=-\frac{1}{2}-i(1+\frac{\sqrt{3}}{2}) \quad ou \quad z=\frac{-i\sqrt{3}+1+2i}{2}=\frac{1}{2}+i(1-\frac{\sqrt{3}}{2})$$

II.

1. a/

$$(\cos\theta+i)^2=\cos^2\theta+2i\cos\theta-1=-(1-\cos^2\theta)+2i\cos\theta=-\sin^2\theta+2i\cos\theta$$

b/

$$(E):z^2+(2i\sin\theta)z-2i\cos\theta=0 \quad \Delta'=(i\sin\theta)^2+2i\cos\theta=-\sin^2\theta+2i\cos\theta=(\cos\theta+i)^2$$

$$z=-i\sin\theta-(\cos\theta+i)=-\cos\theta-i(1+\sin\theta) \; ou \; z=-i\sin\theta+(\cos\theta+i)=\cos\theta+i(1-\sin\theta)$$

2. a/

$$A,B\,et\,C\,alignées\,ssi\,\frac{z_B-z_A}{z_C-z_A}\,est\,un\,réel \Leftrightarrow \frac{\cos\theta-i.\sin\theta}{-\cos\theta-i.(\sin\theta+2)}\,est\,un\,réel$$

$$\Leftrightarrow (\cos\theta-i.\sin\theta)(-\cos\theta+i.(\sin\theta+2))\,est\,un\,réel$$

$$\Leftrightarrow (\cos\theta)(\sin\theta+2)+(\sin\theta)(\cos\theta)=0$$

$$\Leftrightarrow (\cos\theta)(2+2\sin(\theta))=0 \Leftrightarrow \cos\theta=0 \; ou \; \sin(\theta)=-1 \Leftrightarrow \theta=\frac{\pi}{2}\left(car\,\theta\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right]\right)$$

b/

$$B\,et\,C\,appartiennent\,à\,un\,cercle\,de\,centre\,O\,Ssi \; |Z_B|=|Z_C| \Leftrightarrow |e^{-i\theta}+i|=|-e^{i\theta}-i|$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{\cos^2(\theta)+(1-\sin(\theta))^2}=\sqrt{\cos^2(\theta)+(1+\sin(\theta))^2}$$

$$\Leftrightarrow \sin(\theta)=0 \Leftrightarrow \theta=0\,(car\,\theta\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$$

$$Le\,rayon\,de\,ce\,cercle\,est\,|Z_B|=|1+i|=\sqrt{2}$$

EX 21 PAGE33

1.

$$(E): 2z^2-2(1+i)z+\frac{1}{2}+i=0 \quad \Delta'=(1+i)^2-1-2i=-1\Rightarrow \delta'=i$$

$$z=\frac{1+i-i}{2}=\frac{1}{2} \quad ou \quad z=\frac{1+i+i}{2}=\frac{1}{2}+i \quad S_{\mathbb{C}}=\left\{\frac{1}{2};\frac{1}{2}+i\right\}$$

2. a/

$$E_\theta: 2z^2-(1+2\cos(\theta)+2i)z+\cos(\theta)+i=0$$

un nombre réel α *est une solution ssi* $2\alpha^2-(1+2\cos(\theta)+2i)\alpha+\cos(\theta)+i=0$

$$ssi\ 2\alpha^2-\alpha-2\cos(\theta)\alpha-2i\alpha+\cos(\theta)+i=0$$

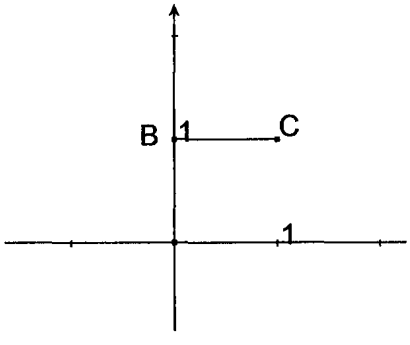
$$ssi\ \left(2\alpha^2-(1+2\cos(\theta))\alpha+\cos(\theta)\right)+i(-2\alpha+1)=0$$

$$ssi\begin{cases}-2\alpha+1=0\\ 2\alpha^2-(1+2\cos(\theta))\alpha+\cos(\theta)=0\end{cases}\Leftrightarrow \alpha=\frac{1}{2}$$

Conclusion : $\alpha=\frac{1}{2}$ *est une solution réelle de* E_θ.

$$z'.z''=\frac{c}{a}\Rightarrow\frac{1}{2}.z''=\frac{\cos(\theta)+i}{2}\Rightarrow z''=\cos(\theta)+i$$

b/ *L'orsque* θ *varie dans* $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$; $\cos\theta$ *varie dans* $[0;1]$ *et donc l'ensemble E des points M est le segment de droite* $[BC]$ *avec* $z_B=i$ *et* $z_C=1+i$



c/

$$AM=\left|\cos(\theta)-\frac{1}{2}+i\right|=\sqrt{\left(\cos(\theta)-\frac{1}{2}\right)^2+1}\Rightarrow AM \text{ est min imale pour } \cos(\theta)=\frac{1}{2}\Rightarrow\theta=\frac{\pi}{3}$$

Conclusion : *AM est* min *imale pour* $\theta=\frac{\pi}{3}$

EX 22 PAGE33

$$z^4=1\Leftrightarrow z=e^{i\frac{2k\pi}{4}}=e^{i\frac{k\pi}{2}}\quad k\in\{0,1,2,3\}\quad S_{\mathbb{C}}=\left\{e^{i0},e^{i\frac{\pi}{2}},e^{i\pi},e^{i\frac{3\pi}{2}}\right\}=\{1,i,-1,-i\}$$

$$\left(\frac{z-i}{z+i}\right)^4=1\Leftrightarrow\frac{z-i}{z+i}=e^{i\frac{k\pi}{2}}\quad k\in\{0,1,2,3\}\quad d'après\quad a)$$

$$*\ \frac{z-i}{z+i}=1\ \ impossible\qquad *\frac{z-i}{z+i}=i\Leftrightarrow z-i=iz-1\Leftrightarrow z(1-i)=-1+i\Leftrightarrow z=-1$$

$$*\frac{z-i}{z+i}=-1\Leftrightarrow z-i=-z-i\Leftrightarrow z=0\quad *\frac{z-i}{z+i}=-i\Leftrightarrow z-i=-iz+1\Leftrightarrow z(1+i)=1+i\Leftrightarrow z=1$$

$$S_{\mathbb{C}}=\{-1,0,1\}$$

EX 23 PAGE33

$$z^3=4\sqrt{2}(-1+i)=8e^{i\frac{3\pi}{4}}\Leftrightarrow z=2e^{i\frac{\frac{\pi}{4}+2k\pi}{3}}\quad avec\,k\in\{0,1,2\}$$

1.

$$S_{\mathbb{C}}=\left\{2\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right);2\left(\cos\frac{11\pi}{12}+i\sin\frac{11\pi}{12}\right);2\left(\cos\frac{19\pi}{12}+i\sin\frac{19\pi}{12}\right)\right\}$$

2.

$$Les\ racines\ cubiques\ de\ l'unité\ sont:1,\ j=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\ et\ j^2=-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sqrt{2}+i\sqrt{2}\ é\tan t\ une\ racine\ cubique\ de\ 4\sqrt{2}(-1+i)\Rightarrow Les\ racines\ cubiques\ de\ 4\sqrt{2}(-1+i)\ sont:$$

$$\sqrt{2}+i\sqrt{2};\left(\sqrt{2}+i\sqrt{2}\right).j=\frac{-\sqrt{2}-\sqrt{6}}{2}+i\frac{-\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}\ et\ \left(\sqrt{2}+i\sqrt{2}\right).j^2=\frac{-\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}+i\frac{-\sqrt{2}-\sqrt{6}}{2}$$

3.

$$\left(\sqrt{2}+i\sqrt{2}\right).j=\frac{-\sqrt{2}-\sqrt{6}}{2}+i\frac{-\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}=2e^{i\frac{\pi}{4}}.e^{i\frac{2\pi}{3}}=2e^{i\frac{11\pi}{12}}$$

$$\cos\frac{11\pi}{12}=\frac{-\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}\Rightarrow\cos\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}\ et\ \sin\frac{11\pi}{12}=\frac{-\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}\Rightarrow\sin\frac{\pi}{12}=\frac{-\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$$

EX 24 PAGE 33 :

$$z^6 = -1 = e^{i\pi} \Rightarrow z = e^{i\frac{\pi+2k\pi}{6}} \quad k \in \{0;1;2;3;4;5\}$$

$$S_{\mathbb{C}} = \left\{ e^{i\frac{\pi}{6}}; e^{i\frac{\pi}{2}}; e^{i\frac{5\pi}{6}}; e^{i\frac{7\pi}{6}}; e^{i\frac{3\pi}{2}}; e^{i\frac{11\pi}{6}}; \right\}$$

$$x^6+1 = \underbrace{\left(x-e^{i\frac{\pi}{6}}\right)\left(x-e^{i\frac{11\pi}{6}}\right)}_{\left(x^2-x(e^{i\frac{\pi}{6}}+e^{i\frac{11\pi}{6}})+1\right)} . \underbrace{\left(x-e^{i\frac{\pi}{2}}\right)\left(x-e^{i\frac{3\pi}{2}}\right)}_{\left(x^2-x(e^{i\frac{\pi}{2}}+e^{i\frac{3\pi}{2}})+1\right)} . \underbrace{\left(x-e^{i\frac{5\pi}{6}}\right)\left(x-e^{i\frac{7\pi}{6}}\right)}_{\left(x^2-x(e^{i\frac{5\pi}{6}}+e^{i\frac{7\pi}{6}})+1\right)}$$

$$= \left(x^2-2\cos(\frac{\pi}{6})x+1\right)\left(x^2-2\cos(\frac{\pi}{2})x+1\right)\left(x^2-2\cos(\frac{5\pi}{6})x+1\right)$$

$$= \left(x^2-\sqrt{3}x+1\right)\left(x^2+1\right)\left(x^2+\sqrt{3}x+1\right)$$